Exercice 1 (4 points)

Construire un triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{5}$.

Déterminer une mesure principale de chacun des angles orientés :

a) $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$; b) $\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)$; c) $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)$

Exercice 3 (3 *points*)

Simplifier, en détaillant les calculs, les expressions suivantes :

1) $A = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$.

2) $B = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.

Exercice 4 (4 *points*)

1) (E) est l'équation $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.

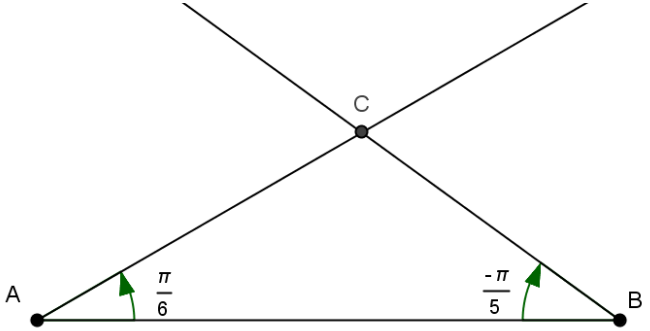
Résoudre l'équation (E) dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Résoudre, dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'inéquation $\cos(3x) \geq \frac{1}{2}$.

3) Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) - 2 = 0$.

Exercice 1

1)



2) a) $\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=\left(-\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)+\pi=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$.

Or $\frac{7\pi}{6}$ n'est pas une mesure principale, et $\frac{7\pi}{6}-2\pi=-\frac{5\pi}{6}$.

Donc **la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est $-\frac{5\pi}{6}$**.

b) $\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)$ d'après la relation de Chasles.

D'où : $\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)=-\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{30}$.

Donc **la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{CA}\right)$ est $\frac{11\pi}{30}$**.

c) $\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)$ d'après la relation de Chasles.

D'où : $\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\left(-\overrightarrow{AC}\,;\,-\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\,-\overrightarrow{BC}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)+\pi$

$=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{5}+\pi=\frac{19\pi}{30}$

Donc **la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$ est $\frac{19\pi}{30}$**.

Exercice 3

1) On a : $\frac{9\pi}{10} = \pi - \frac{\pi}{10}$ et $\frac{6\pi}{10} = \pi - \frac{4\pi}{10}$.

Or, pour tout réel θ, $\boldsymbol{\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta}$.

D'où : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{10}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)$.

Par conséquent, $\boldsymbol{A} = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \mathbf{0}$.

2) On a : $\frac{4\pi}{5} = 2\pi - \frac{6\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5} = 2\pi - \frac{8\pi}{5}$.

Or, pour tout réel θ, $\boldsymbol{\sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin(\theta)}$.

$\boldsymbol{B} = -\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \mathbf{0}$

Exercice 4

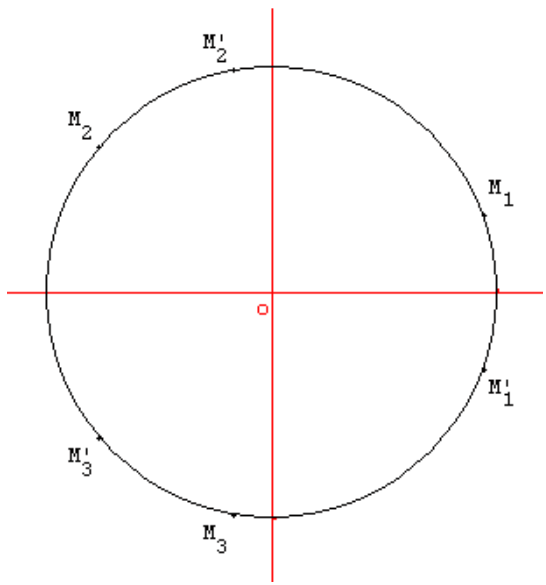
1) $\cos(3x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \qquad\qquad (k \in \mathbf{Z}) \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos(3x)=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1=\dfrac{\pi}{9} \text{ ou } x_2=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{9} \text{ ou } x_3=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{13\pi}{9} \\ \text{ou} \\ x_1=-\dfrac{\pi}{9} \text{ ou } x_2=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{9} \text{ ou } x_3=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{11\pi}{9} \end{cases}$$

Or la mesure principale de $\frac{13\pi}{9}$ est égale à $-\frac{5\pi}{9}$, et celle de $\frac{11\pi}{9}$ est égale à $-\frac{7\pi}{9}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{-\frac{7\pi}{9}\ ;\ -\frac{5\pi}{9}\ ;\ -\frac{\pi}{9}\ ;\ \frac{\pi}{9}\ ;\ \frac{5\pi}{9}\ ;\ \frac{7\pi}{9}}\right\}$.



2) $\cos(3x)\geq\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3}\leq 3x\leq\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{9}\leq x\leq\frac{\pi}{9}$. Par conséquent, $\boldsymbol{S=\left[-\frac{\pi}{9}\ ;\ \frac{\pi}{9}\right]}$.

3) Posons $X=\cos(3x)$. Alors $2\cos^2(3x)+3\cos(3x)-2=0$ équivaut à $2X^2+3X-2=0$.

Calculons le discriminant Δ de ce trinôme : $\Delta=3^2-4\times2\times(-2)=25$.

Comme $\Delta>0$, alors l'équation $2X^2+3X-2=0$ admet deux solutions :

$$X_1=\frac{-3-5}{4}=-2 \text{ et } X_2=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}.$$

Or l'équation $\cos(3x)=-2$ n'admet pas de solution, et l'équation $\cos(3x)=\frac{1}{2}$ admet 6 solutions d'après la question 1).

Donc $\boldsymbol{S=\left\{-\frac{7\pi}{9}\ ;\ -\frac{5\pi}{9}\ ;\ -\frac{\pi}{9}\ ;\ \frac{\pi}{9}\ ;\ \frac{5\pi}{9}\ ;\ \frac{7\pi}{9}\right\}}$.