Exercice 2

1. a) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec, $f'(x) = x^3 - 3x + 4$.

   b) De même, f' est une fonction polynôme donc aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f"(x) = 3x^2 - 3$.

2. a) On a $f"(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$: $f"$ est un trinôme du second degré qui admet -1 et 1 comme racines. On en déduit que $f"$ est positive, donc f' croissante, sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$; tandis que $f"$ est négative, donc f' décroissante, sur $[-1; 1]$.

   b)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f"(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	

   f' est continue et croissante sur $]-\infty; -1]$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $f(-1) = 6 > 0$.
   On en, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; -1]$.
   De plus, sur $[-1; +\infty[$, f' est continu, et le minimum de f' est $f(1) = 2 > 0$, donc l'équation $f'(x) = 0$ n'a aucune solution sur $[-1; +\infty[$.
   Finalement, <u>l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique $c \in]-\infty; -1]$</u>.

   c) On trouve par balayage, à la calculatrice, <u>$-2,20 < c < -2,19$</u>.

3. a) D'après ce qui précède, on a :

x	$-\infty$		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   b) D'après la question précédente :

x	$-\infty$		c		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

   c) c est défini comme la solution de l'équation $f'(c) = 0$, soit $f'(c) = c^3 - 3c + 4 = 0$.
   On a alors, $f(c) = \dfrac{c^4}{4} - \dfrac{3}{2}c^2 + 4c = \dfrac{c^4 - 6c^2 + 16c}{4} = \dfrac{c(c^3 - 6c + 16)}{4}$ or, $c^3 = 3c - 4$, et donc, $f(c) = \dfrac{c(3c - 4 - 6c + 16)}{4} = \dfrac{c(-3c + 12)}{4} = \dfrac{-3c(c-4)}{4}$ et o a donc bien, <u>$f(c) = \dfrac{3c(4-c)}{4}$</u>.

   d) D'après 2.c), $-2,20 < c < -2,19$, et donc, $3c < 0$ et $4 - c > 0$, d'où, $f(c) < 0$.
   On en déduit, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f, qui est continue sur $\mathbb{R}$, sur les intervalles $]-\infty; c]$ et sur $[c; +\infty[$, que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, c'est-à-dire que
   <u>le polynôme f admet deux racines réelles distinctes, une dans $]-\infty; c]$ et l'autre dans $[c; +\infty[$.</u>