Première S — Contrôle de Mathématiques

Exercice I. Soit A(-2 ; 1) et B(4 ; -2) deux points du plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On note (C) l'ensemble des points M$(x ; y)$ du plan tels que : $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$
(Faire la figure sur une feuille séparée)

1°) Déterminer l'ensemble des points M de (C).
2°) Déterminer une équation de la droite (AB).
3°) Déterminer les points d'intersection I et J de (AB) avec (C).
4°) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point K(2 ;-1).

Exercice II Soit ABC un triangle AB = c ; AC = b et BC = a.
Connaissant certaines indications sur le triangle, déterminer d'autres éléments du triangle

a) $\hat{A}=\frac{p}{6}$; $\hat{B}=\frac{p}{6}$ et $a = 1$; calculer b. b) $\hat{A}=\frac{2p}{3}$; $b = 1$ et $c = 2$; calculer a.

c) $\hat{A}=\frac{p}{3}$; $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$; calculer l'aire du triangle.

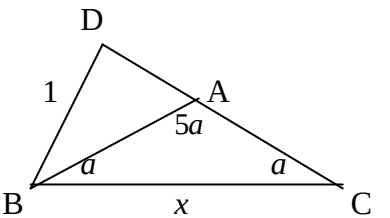
Exercice III. Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A (– 3 ; – 1) et B (5 ; 3).

Trouver l'ensemble E des points M de coordonnées $(x ; y)$ tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux.

Exercice IV. **Pour ceux qui travaillent en plus**…..

Sur la figure ci-contre, les triangles ABC et CBD sont isocèles ;

BD = 1 ; BC = x ; ABC = BCA = a et BAC = $5a$.



1. Donnez une valeur de a en radians.
2. Déterminez une mesure de chacun des angles BAD, ADB et ABD en fonction de a.
3. Calculez AB et AC en fonction de x.
4. En utilisant la règle des sinus, établir que $\frac{\sin(3a)}{x} = \sin a$ et que $\frac{\sin(3a)}{x-1} = \sin(2a)$
5. En utilisant $3a = 2a + a$, établir que $\sin(3a) = \sin(a) \times (4\cos^2 a - 1)$
6. En déduire que $x = 4\cos^2 a - 1$ et que $1 - x = \frac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$
7. Démontrer que finalement $\cos\frac{p}{7}$ est solution de l'équation $8X^3 - 4X^2 - 4X + 1 = 0$

CORRECTION

Exercice I. Soit A(-2 ; 1) et B(4 ; -2) ; (*C*) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$

1°) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre Ω (– 1 ; 3) et de rayon 5 cm.

2°) (AB) ; $\overrightarrow{AB}$ (6 ; – 3) ; $\overrightarrow{AM}$ ($x + 2$; $y - 1$) d'où $x + 2y = 0$

3°) de (AB) on obtient $x = -2y$ soit $4y^2 + y^2 + 2(-2y)x - 6y - 15 = 0$

$y^2 - 2y - 3 = 0$ donc I(–6 ; 3) et J(2 ; –1)

4°) $\overrightarrow{\Omega K}\ \overrightarrow{KM} = 0$ donc $3x - 4y - 10 = 0$

Exercice II

1. $\hat{A} = \frac{p}{6}$; $\hat{B} = \frac{p}{6}$ et $a = 1$; calculer b. le triangle est isocèle donc $b = 1$. (pas de calculs inutiles ……)
2. $\hat{A} = \frac{2p}{3}$; $b = 1$ et $c = 2$; calculer a.

$a^2 = 1 + 4 - 2\times2\times1\cos(2\pi/3)$ donc $a = \sqrt{7}$

3. $\hat{A} = \frac{p}{3}$; $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$; calculer l'aire du triangle.

$\sin\hat{B} = (b.\sin\hat{A})/a = \frac{1}{2}$ d'où $\hat{B} = \frac{p}{6}$ et $\hat{C} = \frac{p}{2}$ donc l'aire = $ab/2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice III. A (– 3 ; – 1) et B (5 ; 3).

$(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow (-3x - 1 ; 1 - 3y).(7 - 3x ; 5 - 3y) = 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 18x + 9y^2 - 18y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2/9 = 0$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre Ω (1 ; 1) et de rayon $(2\sqrt{5}/3)$ cm

Exercice IV. **Pour ceux qui travaillent en plus**…..

- Valeur de a en radians. Dans ABC $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ soit $7a = \pi$ donc $a = \pi/7$
- Mesure de des angles BAD, ADB et ABD en fonction de a.

Les angles DAB et BAC sont supplémentaires donc BAD = π - BAC = $2\pi/7 = 2a$

DBC est isocèle en C donc ADB = CDB = (π - DCB) /2 = $3\pi/7 = 3a$

ABD = $3a - a = 2a$ ABD est donc isocèle en D.

- Calcule de AB et AC en fonction de x.

ABD est donc isocèle en D donc BD = AD = 1 et BC = CD = x

D'où AC = AB = x - 1

- Etablir que $\frac{\sin(3a)}{x} = \sin a$ et que $\frac{\sin(3a)}{x-1} = \sin(2a)$

Dans DBC isocèle en C, on a : $\frac{BD}{\sin C} = \frac{BC}{\sin D}$ donc $\sin(a) = \frac{\sin(3a)}{x}$

Dans ABD, on a : $\frac{BA}{\sin D} = \frac{BD}{\sin A}$ donc $\sin(2a) = \frac{\sin(3a)}{x-1}$

- Etablir que $\sin(3a) = \sin(a) \times (4\cos^2 a - 1)$

$\sin(3a) = \sin(2a + a) = \sin(a) \times \cos(2a) + \cos(a) \times \sin(2a)$

$= \sin(a)\,[2\cos^2(a) - 1] + 2\sin(a) \times \cos^2(a) = \sin(a) \times (4\cos^2 a - 1)$

- Montrons que $x = 4\cos^2 a - 1$ et que $x - 1 = \dfrac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$

D'après les questions précédentes nous avons $\sin(a) = \dfrac{\sin(3a)}{x}$ donc $x = \dfrac{\sin(3a)}{\sin(a)}$

et $\sin(3a) = \sin(a) \times (4\cos^2 a - 1)$ donc $x = 4\cos^2 a - 1$

$1 - x = \dfrac{\sin(3a)}{\sin(2a)} = \dfrac{\sin(3a)}{\sin(a)} \times \dfrac{\sin(a)}{\sin(2a)} = (4\cos^2 a - 1) \times \dfrac{1}{2\cos(a)}$ donc $1 - x = \dfrac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$

- Démontrons que $\cos \dfrac{p}{7}$ est solution de l'équation $8X^3 - 4X^2 - 4X + 1 = 0$

$x = 4\cos^2 a - 1$ et $1 - x = \dfrac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$ donc $1 - (4\cos^2 a - 1) = \dfrac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$

soit $8\cos^3 a + 4\cos^2 a + 4\cos a - 1 = 0$

donc $\cos \dfrac{p}{7}$ est bien solution de l'équation $8X^3 - 4X^2 - 4X + 1 = 0$