n est un entier naturel. n! (« factorielle ») est le nombre défini par $0\,! = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $n\,! = n\,(n-1) \times ... \times 1$. u et v sont les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et v_0, v_1, v_2, v_3
2. *a*. Démontrer que les suites u et v sont adjacentes.
b. Avec un tableur, donner un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-8} de la limite commune de ces deux suites.
3. On admet que la limite commune de u et v est le nombre réel e tel que ln e = 1 .

On suppose que e est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il existe des entiers p et q premiers entre eux tels que $e = \frac{p}{q}$.

a. Démontrer qu'alors $q\,!\,u_q \leq p \times (q-1)\,! \leq q\,!\,u_q + 1$
b. En déduire que e n'est pas rationnel.

CORRECTION

1. $u_0 = \frac{1}{0!} = 1$; $v_0 = u_0 + \frac{1}{0!} = 2$

$u_1 = 1 + \frac{1}{1!} = 2$; $v_1 = u_1 + \frac{1}{1!} = 3$

$u_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$; $v_2 = u_2 + \frac{1}{2!} = 3$

$u_3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3}$; $v_3 = u_3 + \frac{1}{3!} = \frac{17}{6}$

2. Il faut d'abord trouver le sens de variation des deux suites (u_n) et (v_n).

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est (strictement) croissante.

$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}$ donc $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$ or $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$

donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

pour réduire au même dénominateur, il suffit de remarquer que $n\,! \times (n+1)\,! = 1 \times 2 \times \ldots \times n \times (n+1) = (n+1)\,!$

$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{(n+1)}{n!\,(n+1)}$ soit $v_{n+1} - v_n = \frac{1-n}{(n+1)!}$ donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n < 0$

La suite (v_n) est décroissante à partir de $n = 1$. (ce qui était visible sur les premiers termes)

Il faut maintenant montrer que l'écart entre les deux termes de même rang des deux suites tend vers 0

$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ donc $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$

La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$ donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. *b*. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc convergent vers une même limite L et $u_n \leq L \leq v_n$

En utilisant un tableur en marquant : dans la cellule B2 la formule = 1/FACT(A2) ;

dans la cellule B3 la formule = B2 + 1/FACT(A2) puis en recopiant cette formule vers le bas

dans la cellule C2, on marque la formule = B2 + 1/FACT(A2) puis en recopiant cette formule vers le bas

dans la cellule D2, on marque la formule = C2 – B2 puis en recopiant cette formule vers le bas, on obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	$v_n - u_n$
2	0	1	2	1
3	1	2	3	1
4	2	2,5	3	0,5
5	3	2,666666667	2,833333333	0,166666667
6	4	2,708333333	2,75	0,041666667
7	5	2,716666667	2,725	0,008333333
8	6	2,718055556	2,719444444	0,001388889
9	7	2,718253968	2,718452381	0,000198413
10	8	2,71827877	2,718303571	2,48016E-05
11	9	2,718281526	2,718284281	2,75573E-06
12	10	2,718281801	2,718282077	2,75573E-07
13	11	2,718281826	2,718281851	2,50521E-08
14	12	2,718281828	2,71828183	2,08768E-09
15	13	2,718281828	2,718281829	1,60591E-10
16	14	2,718281828	2,718281828	1,14708E-11
17	15	2,718281828	2,718281828	7,64722E-13
18	16	2,718281828	2,718281828	4,79616E-14

D'après le tableau : $u_{12} \leq \mathrm{L} \leq v_{12}$ avec une amplitude inférieure à 10^{-8}.

3. *a*. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc convergent vers une même limite L.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \leq \mathrm{L} \leq v_n$ avec $\mathrm{L} = \frac{p}{q}$ donc en particulier $u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q$ or $v_q = u_q + \frac{1}{q!}$ donc $u_q \leq \frac{p}{q} \leq u_q + \frac{1}{q!}$

soit en multipliant par q ! on obtient : $q!\,u_q \leq \frac{p}{q} \times q! \leq q!\,u_q + 1$

$q! = 1 \times 2 \times .. \times (q-1) \times q$ donc $\frac{1}{q} \times q! = 1 \times 2 \times .. \times (q-1)$ soit $\frac{1}{q} \times q! = (q-1)!$

donc $q!\,u_q \leq p \times (q-1)! \leq q!\,u_q + 1$ avec $u_q = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{q!}$

3. *b*. $q!\,u_q \leq p \times (q-1)! \leq q!\,u_q + 1$

or si k est entier naturel compris entre 0 et q, on a $\frac{q!}{k!} = \frac{1 \times 2 \times ... \times k \times (k+1) \times ... \times q}{1 \times 2 \times ... \times k} = k \times (k+1) \ldots \times q$

$p \times (q-1)!$ est un entier naturel compris entre deux entiers naturels consécutifs
donc e n'est pas rationnel