Exercice 1. Suite définie par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 83

(Source : ts-suites-01)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Étudier la monotonie de (u_n).

2 *a.* Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$.

b. Déterminer alors la limite de (u_n).

3 Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer la propriété conjecturée.

Exercice 2. Suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 84

(Source : ts-suites-02)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Calculer u_1, u_2 et u_3 sous forme de fraction irréductible.

2 Conjecturer la formule qui donne u_n puis la montrer par récurrence.

Exercice 3. Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

★★☆☆☆ A

Corrigé page 85

(Source : ts-suites-03)

Soit la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1 Déterminer les variations de f sur $[0\,;2]$.
Montrer alors l'implication suivante :

$$x \in [1\,;2] \Rightarrow f(x) \in [1\,;2].$$

2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [1\,;2]$ et que $u_n \leqslant u_{n+1}$.

3 En déduire que la suite (u_n) converge.
Calculer alors sa limite.

■ Exercice 4. Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$

★★★☆☆ R

Corrigé page 86

(Source : ts-suites-04)

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Montrer que si (u_n) converge vers un nombre ℓ, alors ℓ est racine du polynôme :

$$P(x) = x^2 + x - 6.$$

2 Déterminer les racines de P. On les notera α et β, avec $\alpha > \beta$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$.

3 Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera alors son premier terme et sa raison.

4 En déduire la limite de la suite (u_n).

■ Exercice 5. Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{4x-1}{4x}$

★★★☆☆ R

Corrigé page 87

(Source : ts-suites-05)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

et la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}.$$

1 Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

2 En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

■ Exercice 6. Suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$

★★★☆☆ R

Corrigé page 88

(Source : ts-suites-06)

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

1 Calculer les 10 premiers termes de cette suite à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur. Que peut-on conjecturer quant à la nature de (u_n) ?

2 On pose $v_n = u_n - 4n + 10$.

a. Monter que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

b. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

c. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Donner l'expression de S_n en fonction de n.

■ Exercice 7. Démonstration par récurrence : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 88

(Source : ts-suites-07)

On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2.$$

Montrer par récurrence que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

■ Exercice 8. Étude générale des suites de la forme $u_{n+1} = \lambda u_n + \mathrm{P}(n)$

★★★★★ R

Corrigé page 89

(Source : ts-suites-08)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \lambda u_n + \mathrm{P}(n) \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où P est un polynôme et où $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.
On pose alors la suite (v_n) définie par :

$$v_n = u_n + \mathrm{Q}(n),$$

où Q est un polynôme.

1 Montrer l'équivalence suivante :

$$(v_n) \text{ est une suite géométrique} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(n) = \lambda \mathrm{Q}(n) - \mathrm{Q}(n+1).$$

On suppose maintenant que $\mathrm{P}(n) = an + b$, a et b étant deux réels non nuls.

2 Trouver, en fonction de λ, a et b, l'expression du polynôme Q.

3 En déduire, en fonction de λ, u_0, a, b et n, une expression de v_n, puis de u_n.

4 Application : déterminer l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 7$.
Vérifier la formule trouvée pour les premiers termes de (u_n).

■ Exercice 9. Suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}$

★★★☆☆ R

Corrigé page 91

(Source : ts-suites-09)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{2}{3} \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Déterminer le réel λ tel que la suite géométrique (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

soit géométrique.

2 Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

■ Exercice 10. Calcul de la limite de $\frac{n+\cos(n)}{n^2}$

★★☆☆☆ A

Corrigé page 91

(Source : ts-suites-10)

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ où $u_n = \dfrac{n + \cos(n)}{n^2}$.

■ Exercice 11. Suites imbriquées

★★★★☆ R

Corrigé page 91

(Source : ts-suites-11)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_0 = v_0 = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 0,6u_n + 0,3v_n \\ v_{n+1} = 0,4u_n + 0,7v_n \end{cases}$$

On pose alors pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases}$$

1 Montrer que (a_n) est constante.

2 Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

3 En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis celle de v_n en fonction de n.

4 Démontrer que (u_n) converge et donner sa limite.

■ Exercice 14. Étude générale des suites imbriquées

★★★★★ R

Corrigé page 96

(Source : ts-suites-14)

Dans cet exercice, par soucis de simplification des raisonnements, on admettra que toutes les fractions sont définies.

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par leur premiers termes u_0 et v_0 et par les relations de récurrences suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n \\ v_{n+1} = \lambda u_n + \mu v_n \end{cases}, \qquad \alpha, \beta, \lambda, \mu \text{étant 4 réels non nuls.}$$

On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = p_1 u_n + q_1 v_n \\ b_n = p_2 u_n + q_2 v_n \end{cases}.$$

1 Montrer l'équivalence suivante :

$$(a_n) \text{ est constante } \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{\mu - \lambda}{\alpha\mu - \beta\lambda} \\ q_1 = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\mu - \beta\lambda} \end{cases}.$$

2 *a.* Montrer l'équivalence suivante :

$$(b_n) \text{ est géométrique } \Leftrightarrow \frac{p_2}{q_2} = \frac{\alpha p_2 + \lambda q_2}{\beta p_2 + \mu q_2}.$$

b. En déduire que (b_n) est géométrique équivaut à :

$$\left(p_2 + \frac{\mu - \alpha}{2\beta} q_2\right)^2 = \frac{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda}{4\beta^2} q_2^2.$$

On suppose que $(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda \geqslant 0$.

c. En déduire que :

$$p_2 = \frac{\sqrt{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda} + \alpha - \mu}{2\beta} q_2 \quad \text{ou} \quad p_2 = \frac{-\sqrt{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda} + \alpha - \mu}{2\beta} q_2.$$

d. Montrer que si $p_2 = q_2$, alors $\beta + \mu = \alpha + \lambda$.

3 En prenant $\alpha = 0,6$, $\beta = 0,3$, $\lambda = 0,4$ et $\mu = 0,7$, déterminer la valeur de p_1, q_1 et p_2 sachant que l'on pose $q_2 = -3$.

■ Exercice 15. Suite définie par $u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$

★★★☆☆ A

Corrigé page 98

(Source : ts-suites-15)

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !
On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = kx(1 - x),$$

k étant un paramètre réel qui dépend de l'environnement.
Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0,3$.
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.
Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1 Justifier que si la suite (u_n) définie précédemment converge vers α, alors α vérifie la relation $f(\alpha) = \alpha$.

2 Supposons $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.

a. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

3 Supposons maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

b. En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,

- montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$;
- établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

■ Exercice 21. L'escargot de Gardner

★★★★★ R

Corrigé page 109

(Source : ts-suites-21)

Léo l'escargot avance à la vitesse de 1 m/h sur un élastique de 100 mètres qui peut s'allonger à l'infini.
Au début de chaque heure, on allonge l'élastique de 100 mètres de façon homogène, ce qui signifie qu'au début de la 1re heure écoulée, l'escargot se trouvait à 1 mètre du point de départ avant l'allongement de l'élastique et se retrouve à 2 mètres du point de départ après car pour passer de 100 m à 200 m, on a multiplié par 2.
Au bout de la 2e heure, Léo avance de 1 mètre et après allongement, il se trouve à 4,50 mètres.
On note u_n la distance (en mètre) parcourue par Léo au bout de n heures avant l'allongement de l'élastique. Ainsi, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$.

1 *a.* Expliquer la valeur de u_2.

b. Calculer u_3.

2 Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n + 1$.

3 On note p_n le pourcentage représentant l'avancement de Léo par rapport à la longueur de l'élastique (avant allongement) à l'étape n. Ainsi, $p_1 = 1$ et $p_2 = 1,5$.

Montrer que $p_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

4 Montrer par récurrence que $p_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.

5 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$.

6 En déduire la limite de la suite (p_n).

Que peut-on alors conclure quant à Léo ? N'y a-t-il pas alors un paradoxe ?

Corrigés

24 mars 2016

Corrigé de l'exercice 1.

1 On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n + 2n + 3 - u_n \\ &= 2n + 3 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

2 *a.* Posons $P(n)$ la propriété : $u_n \geqslant n^2$.

- **Initialisation.**
  $u_0 = 1 \geqslant 0$ donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier naturel k positif, $P(k)$ est vraie (H.R.). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geqslant (k+1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\ &\geqslant k^2 + 2k + 3 \quad \text{(H.R.)} \\ &\geqslant k^2 + 2k + 1 + 2 \\ &\geqslant (k+1)^2 + 2 \\ &\geqslant (k+1)^2 \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion.**
  Quel que soit l'entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
  Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. D'après le théorème de comparaison des suites et d'après la question précédente, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \geqslant \lim_{n \to +\infty} n^2$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

3 Calculons les premiers termes de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1 \\
u_1 &= u_0 + 2 \times 0 + 3 = 4 \\
u_2 &= u_1 + 2 \times 1 + 3 = 9 \\
u_3 &= u_2 + 2 \times 2 + 3 = 16 \\
u_4 &= u_3 + 2 \times 3 + 3 = 25
\end{aligned}$$

On peut alors conjecturer que $u_n = (n+1)^2$. Montrons cela par récurrence.

- **Initialisation.**
  Faites précédemment.

- **Hérédité.**
  On suppose que pour un entier naturel k, $u_k = (k+1)^2$ (qui constitue la propriété $P(k)$). Montrons que $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\
&= (k+1)^2 + 2k + 3 \\
&= k^2 + 4k + 4 \\
&= (k+2)^2
\end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.

- **Conclusion.**
  Quel que soit l'entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
  Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Corrigé de l'exercice 2.

1 Calculons :

$$u_1 = \frac{1}{2 - u_0} \qquad u_2 = \frac{1}{2 - u_1} \qquad u_3 = \frac{1}{2 - u_2}$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} \qquad u_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}}$$

$$- \quad - \qquad u_2 = \frac{2}{3} \qquad u_3 = \frac{3}{4}$$

2 Posons $P(n)$ la propriété : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

- **Initialisation.**
  Faite dans la question 1.

- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier naturel k, $P(k)$ est vraie (H.R.). Montrons alors que

$P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que $u_{k+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2-u_n} \\ &= \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} \quad \text{(H.R.)} \\ &= \frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

- **Conclusion.**
  Quel que soit l'entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
  Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Corrigé de l'exercice 3.

1 On a :

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $[0\,;2]$.
On en déduit alors :

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$$

Or, $f(1) = \dfrac{3}{2} > 1$ et $f(2) = \dfrac{5}{3} < 2$.
Ainsi,

$$x \in [1\,;2] \Rightarrow f(x) \in [1\,;2].$$

2 Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \in [1\,;2]$. Démontrons qu'elle est vraie pour tout entier naturel n par récurrence.

- **Initialisation.**
  $u_0 = 1 \in [1\,;2]$.
- **Hérédité.**
  Supposons que $P(k)$ soit vraie, où k est un entier naturel. Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi.
  D'après la question précédente, on a :

  $$u_k \in [1\,;2] \Rightarrow f(u_k) \in [1\,;2].$$

  Or, $f(u_k) = u_{k+1}$ donc $P(k+1)$ est vraie.
  L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion.**
  On vient de montrer que $P(0)$ est vraie et que pour un certain entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
  Ainsi, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel n.

De plus, f est croissante sur $[1\,;2]$ donc $f\left(u_n\right) > u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} > u_n$.

3 De la question précédente, on peut conclure que la suite (u_n) est croissante et bornée, donc majorée.
Or, toute suite croissante et majorée converge.
Donc (u_n) est convergente.

Posons alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Nous savons que $u_n \in [1;2]$ pour tout entier naturel n, donc $\ell \in [1\,;2]$ On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = f\left(u_n\right) &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f\left(u_n\right) \\ &\Leftrightarrow \ell = f(\ell) \quad \text{car } f \text{ est continue} \\ &\Leftrightarrow \ell = \frac{2\ell+1}{\ell+1} \\ &\Leftrightarrow \ell^2 + \ell = 2\ell + 1 \\ &\Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $\ell^2 - \ell - 1$ est $\Delta = 5$ donc il possède deux racines : $\ell_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\ell_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \in [1\,;2]$. Ainsi, $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Corrigé de l'exercice 4.

1 Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{u_n+6}{u_n+2} &\Rightarrow \ell = \frac{\ell+6}{\ell+2} \\ &\Rightarrow \ell(\ell+2) = \ell+6 \\ &\Rightarrow \ell^2 + 2\ell - \ell - 6 = 0 \\ &\Rightarrow \ell^2 + \ell - 6 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, ℓ est bien une racine du polynôme P.

2 $x_1 = 2$ est une racine évidente de P ; de plus, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = -6$, donc $x_2 = -3$. Les deux racines de P donc sont $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.

3 On a $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3} \\ &= \frac{\frac{u_n+6}{u_n+2} - 2}{\frac{u_n+6}{u_n+2} + 3} \\ &= \frac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n+2} \times \frac{u_n+2}{u_n+6+3u_n+6} \\ &= \frac{-u_n+2}{4u_n+12} \\ &= -\frac{1}{4} \times \frac{u_n-2}{u_n+3} \\ &= -\frac{1}{4} v_n\ . \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = -\frac{1}{4}$ et de raison $q = -\dfrac{1}{4}$.

4 La suite (v_n) converge vers « 0 » comme suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1. Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 3} = 0 &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - 2) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.

1

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{4u_n} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{4u_n} - \frac{2u_n}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{4u_n}{2u_n - 1} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2u_n}{u_n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\left(u_n - \frac{1}{2}\right)}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= 2\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{5}$ et de raison $r = 2$.

2 D'après ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ car $r > 0$ d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} = +\infty\ ,$$

ce qui signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 6.

1 On trouve :

- $u_1 = -0,5$
- $u_2 = 0,75$
- $u_3 = 3,375$
- $u_4 = 6,6875$
- $u_5 = 10,34375$
- $u_6 = 14,171875$
- $u_7 = 18,0859375$
- $u_8 = 22,04296875$
- $u_9 = 26,021484375$

On peut alors conjecturer que (u_n) est strictement croissante à partir de $n = 1$

2 *a.*
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4(n+1) + 10 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 2n + 5 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 4n + 10) \\ &= \frac{1}{2}v_n\ . \end{aligned}$$

On déduit alors que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 \times 0 + 10 = 11$.

b. On a alors : $v_n = 11 \times \frac{1}{2^n}$ et donc :

$$u_n = v_n + 4n - 10 = \frac{11}{2^n} + 4n - 10.$$

c.
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{11}{2^n} + 4n - 10\right) \\ &= 11\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} + 4\sum_{k=0}^{n}k - 10\sum_{k=0}^{n}1 \\ &= 11\left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 10(n+1) \\ &= 22\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 2(n-5)(n+1). \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7.

Posons $P(n)$ la propriété :

$$(P_n)\ :\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1 **Initialisation.**
$S_1 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times (1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1.$
Donc $P(1)$ est vraie.

2 **Hérédité.**
Supposons que pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= S_k + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] \\
&= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\right] \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}
\end{aligned}$$

« $k_1 = -2$ » est une racine évidente du polynôme $2k^2 + 7k + 6$ donc la seconde racine k_2 est telle que $k_1 k_2 = \frac{c}{a}$, donc $k_2 = -\frac{1}{2} \times \frac{6}{2} = -\frac{3}{2}$.
Donc $2k^2 + 7k + 6 = 2\,(k+2)\left(k + \frac{3}{2}\right) = (k+2)(2k+3)$.
Finalement, on a :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

L'hérédité est donc vérifiée.

3 **Conclusion.**
Quel que soit l'entier naturel $k \geqslant 1$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

■ Corrigé de l'exercice 8.

1
$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} + \mathrm{Q}(n+1) \\
&= \lambda u_n + \mathrm{P}(n) + \mathrm{Q}(n+1) \\
&= \lambda\left(u_n + \frac{1}{\lambda}\mathrm{P}(n) + \frac{1}{\lambda}\mathrm{Q}(n+1)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(v_n) \text{ est une suite géométrique} &\Leftrightarrow u_n + \frac{1}{\lambda}\mathrm{P}(n) + \frac{1}{\lambda}\mathrm{Q}(n+1) = v_n \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\mathrm{P}(n) + \frac{1}{\lambda}\mathrm{Q}(n+1) = \mathrm{Q}(n) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{P}(n) = \lambda\mathrm{Q}(n) - \mathrm{Q}(n+1).
\end{aligned}$$

2 Posons $\mathrm{Q}(n) = \alpha n + \beta$.
D'après la question précédente, pour tout entier nature n,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(n) = \lambda \mathrm{Q}(n) - \mathrm{Q}(n+1) \\
\Leftrightarrow\ & an + b = \lambda\alpha n + \lambda\beta - \alpha n - \alpha - \beta \\
\Leftrightarrow\ & (a + \alpha - \lambda\alpha)n + b + \alpha + \beta - \lambda\beta = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a + \alpha(1-\lambda) = 0 \\ b + \alpha + \beta(1-\lambda) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

De la 1re équation, on déduit :

$$\alpha = \frac{a}{\lambda - 1}$$

et de la 2e équation, on tire :

$$\beta = \frac{1}{\lambda - 1}\left(b + \frac{a}{\lambda - 1}\right).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Q}(n) = \frac{a}{\lambda - 1}n + \frac{b}{\lambda - 1} + \frac{a}{(\lambda - 1)^2}.$$

3 Nous savons que (v_n) est une suite géométrique de raison λ. Ainsi, $v_n = v_0\lambda^n$ pour tout entier naturel n.
Or, $v_0 = u_0 + Q(0) = u_0 + \dfrac{b}{\lambda - 1} + \dfrac{a}{(\lambda - 1)^2}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(u_0 + \frac{b}{\lambda - 1} + \frac{a}{(\lambda - 1)^2}\right)\lambda^n.$$

De plus, $v_n = u_n + \mathrm{Q}(n)$, donc $u_n = v_n - \mathrm{Q}(n)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(u_0 + \frac{b}{\lambda - 1} + \frac{a}{(\lambda - 1)^2}\right)\lambda^n - \frac{a}{\lambda - 1}n - \frac{b}{\lambda - 1} - \frac{a}{(\lambda - 1)^2}.$$

4 Application : $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 7$ donc $\lambda = 2$, $a = -3$ et $b = 7$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(5 + \frac{7}{2-1} + \frac{-3}{(2-1)^2}\right) \times 2^n - \frac{-3}{2-1}n - \frac{7}{2-1} - \frac{-3}{(2-1)^2}$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 9 \times 2^n + 3n - 4.$$

Vérifions sur les premiers termes :

n	Avec la formule de récurrence	Avec la formule trouvée
0	$u_0 = 5$ par définition	$u_0 = 9 \times 2^0 + 3 \times 0 - 4 = 9 - 4 = 5$
1	$u_1 = 2u_0 - 3 \times 0 + 7 = 10 + 7 = 17$	$u_1 = 9 \times 2^1 + 3 \times 1 - 4 = 18 + 3 - 4 = 17$
2	$u_2 = 2u_1 - 3 \times 1 + 7 = 34 - 3 + 7 = 38$	$u_2 = 9 \times 2^2 + 3 \times 2 - 4 = 36 + 6 - 4 = 38$

Corrigé de l'exercice 9.

1 Pour que (v_n) soit géométrique de raison q, il faut que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= qv_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3} + \lambda &= q\left(u_n + \lambda\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{4}{3} + 2\lambda\right) &= q\left(u_n + \lambda\right). \end{aligned}$$

Ainsi, il faut que $q = \dfrac{1}{2}$ et que $-\dfrac{4}{3} + 2\lambda = \lambda$, soit $\lambda = \dfrac{4}{3}$.

2 (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$, donc elle converge vers 0 (car sa raison est strictement comprise entre 0 et 1).

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \dfrac{4}{3}\right) = 0$, ce qui signifie que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{4}{3}}$.

Corrigé de l'exercice 10.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} n - 1 \leqslant n + \cos(n) &\leqslant n + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2} \leqslant \frac{n+\cos(n)}{n^2} &\leqslant \frac{n+1}{n^2} \end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

De même,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Corrigé de l'exercice 11.

1
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= 0,6u_n + 0,3v_n + 0,4u_n + 0,7v_n \\ &= u_n + v_n \\ &= a_n \end{aligned}$$

Ainsi, (a_n) est constante.
Or, $a_0 = u_0 + v_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ donc $a_n = 1$ pour tout entier naturel n.

2 $$\begin{aligned} b_{n+1} &= 4u_{n+1} - 3v_{n+1} \\ &= 4(0,6u_n + 0,3v_n) - 3(0,4u_n + 0,7v_n) \\ &= 2,4u_n + 1,2v_n - 1,2u_n - 2,1v_n \\ &= 1,2u_n - 0,9v_n \\ &= 0,3\,(4u_n - 3v_n) \\ &= 0,3b_n \end{aligned}$$

Ainsi, (b_n) est une suite arithmétique de raison $q = 0,3$ et de premier terme :

$$\begin{aligned} b_0 &= 4u_0 - 3v_0 \\ &= 4 \times 0,5 - 3 \times 0,5 \\ b_0 &= 0,5. \end{aligned}$$

3 D'après la question précédente, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{1}{2}(0,3)^n.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_n = 3u_n + 3v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 4u_n - 3v_n \\ 3a_n + b_n = 7u_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3v_n = 4\left(\frac{3}{7}a_n + \frac{1}{7}b_n\right) - b_n \\ u_n = \frac{3}{7}a_n + \frac{1}{7}b_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \frac{4}{7}a_n - \frac{1}{7}b_n \\ u_n = \frac{3}{7}a_n + \frac{1}{7}b_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \frac{4}{7} - \frac{1}{14}(0,3)^n \\ u_n = \frac{3}{7} + \frac{1}{14}(0,3)^n \end{cases} \end{aligned}$$

4 $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,3)^n = 0$ car $0 < 0,3 < 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \dfrac{3}{7}$.

Corrigé de l'exercice 14.

1 $a_{n+1} = p_1(\alpha u_n + \beta v_n) + q_1(\lambda u_n + \mu v_n)$
$= (\alpha p_1 + \lambda q_1)u_n + (\beta p_1 + \mu q_1)v_n$.

Pour que (a_n) soit constante, il faut que $a_{n+1} = a_n$, soit :

$$\begin{cases} \alpha p_1 + \lambda q_1 = 1 & \times\mu \\ \beta p_1 + \mu q_1 = 1 & \times\lambda \end{cases} \Leftrightarrow (L_1) - (L_2) \ : \ (\alpha\mu - \beta\lambda)p_1 = \mu - \lambda$$

$$\Leftrightarrow p_1 = \frac{\mu - \lambda}{\alpha\mu - \beta\lambda}$$

De même,

$$\begin{cases} \alpha p_1 + \lambda q_1 = 1 & \times\beta \\ \beta p_1 + \mu q_1 = 1 & \times\alpha \end{cases} \Leftrightarrow (L_1) - (L_2) \ : \ (\alpha\mu - \beta\lambda)q_1 = \alpha - \beta$$

$$\Leftrightarrow p_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\mu - \beta\lambda}$$

2 *a.* $b_{n+1} = (\alpha p_2 + \lambda q_2)u_n + (\beta p_2 + \mu q_2)v_n$

$$= \frac{\alpha p_2 + \lambda q_2}{p_2}\left(p_2 u_n + \frac{p_2(\beta p_2 + \mu q_2)}{\alpha p_2 + \lambda q_2} v_n\right)$$

Pour que (b_n) soit géométrique, il faut que :

$$\frac{p_2(\beta p_2 + \mu q_2)}{\alpha p_2 + \lambda q_2} = q_2 \Leftrightarrow \frac{p_2}{q_2} = \frac{\alpha p_2 + \lambda q_2}{(\beta p_2 + \mu q_2)}.$$

b. $\dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{\alpha p_2 + \lambda q_2}{(\beta p_2 + \mu q_2)} \Leftrightarrow \beta p_2^2 + \mu p_2 q_2 = \alpha p_2 q_2 + \lambda q_2^2$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \beta p_2^2 + (\mu - \alpha) p_2 q_2 - \lambda q_2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow p_2^2 + \frac{\mu - \alpha}{\beta} p_2 q_2 - \frac{\lambda}{\beta} q_2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(p_2 + \frac{\mu - \alpha}{2\beta} q_2\right)^2 - \left(\frac{\mu - \alpha}{2\beta}\right)^2 q_2^2 - \frac{\lambda}{\beta} q_2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(p_2 + \frac{\mu - \alpha}{2\beta} q_2\right)^2 = \frac{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda}{4\beta^2} q_2^2
\end{aligned}$$

c. De l'égalité précédente, on déduit :

$$\left| p_2 + \frac{\mu - \alpha}{2\beta} q_2 \right| = \frac{\sqrt{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda}}{2|\beta|} |q_2| .$$

On en déduit :

$$p_2 + \frac{\mu - \alpha}{2\beta} q_2 = \frac{\sqrt{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda}}{2|\beta|} |q_2|$$

ou

$$-p_2 - \frac{\mu - \alpha}{2\beta} q_2 = \frac{\sqrt{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda}}{2|\beta|} |q_2| .$$

Soit :

$$p_2 = \frac{\sqrt{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda}}{2|\beta|} |q_2| + \frac{\alpha - \mu}{2\beta} q_2$$

ou

$$p_2 = -\frac{\sqrt{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda}}{2|\beta|} |q_2| + \frac{\alpha - \mu}{2\beta} q_2.$$

On en déduit alors :

$$p_2 = \frac{\sqrt{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda} + \alpha - \mu}{2\beta} q_2 \quad \text{ou} \quad p_2 = \frac{-\sqrt{(\mu - \alpha)^2 + 4\beta\lambda} + \alpha - \mu}{2\beta} q_2.$$

d. Si $p_2 = q_2$, alors :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= p_2(u_{n+1} + v_{n+1}) \\
&= p_2((\alpha + \lambda) u_n + (\beta + \mu) v_n) \\
&= p_2(\alpha + \lambda) \left(u_n + \frac{\beta + \mu}{\alpha + \lambda}\right).
\end{aligned}$$

Pour que (b_n)soit géométrique, il faut donc que $\dfrac{\beta + \mu}{\alpha + \lambda}$, soit $\beta + \mu = \alpha + \lambda$.

3 On prend $\alpha = 0,6$, $\beta = 0,3$, $\lambda = 0,4$, $\mu = 0,7$ et $q_2 = -3$.
On trouve facilement $p_1 = q_1 = 1$.
D'après la formule trouvée à la question 2.(c), on trouve deux valeurs possibles pour p_2 : -3 ou 4.
Or, la question 2.(d) nous dit que si $q_2 = p_2$, alors on doit avoir $\beta + \mu = \alpha + \lambda$, ce qui n'est pas le cas ici.

Donc $p_2 = 4$.
Finalement, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = 0,6u_n + 0,3v_n \\ v_{n+1} = 0,4u_n + 0,7v_n \end{array} \right.$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} a_n = u_n + v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{array} \right. .$$

Corrigé de l'exercice 15.

1 Notons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.
Alors,

$$u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n).$$

Or, f est continue donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right) = f(\alpha)$.
Ainsi,

$$\boxed{\alpha = f(\alpha)}$$

2 $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, $u_0 = 0,4$.

a. $\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - u_n^2 - u_n \\ &= -u_n^2 \\ &\leqslant 0 \text{ car un carré est toujours positif ou nul.} \end{aligned}$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$; la suite (u_n) est donc décroissante.

b.
- **Initialisation.**
  $u_0 = 0,4$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
- **Hérédité.**
  On suppose que pour un entier n donné, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$; de plus, par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$.
  Par produit, $0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant 1$. Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
  L'hérédité est alors vérifiée : $u_n \Rightarrow u_{n+1}$.

Par conséquent, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c. La suite (u_n)étant décroissante et minorée, elle converge. Sa limite α vérifie :

$$\begin{aligned} & \alpha = \alpha(1 - \alpha) \\ \Leftrightarrow\ & \alpha = \alpha - \alpha^2 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = -\alpha^2 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

d. Avec de telles hypothèses, la population de coccinelles tend à disparaître.

3 $u_{n+1} = 1,8u_n(1 - u_n)$, $u_0 = 0,3$.

a. $f(x) = 1,8x(1 - x) = 1,8(x - x^2)$ donc $f'(x) = 1,8(1 - 2x)$.
Donc $\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow 1 - 2x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \geqslant 2x \\ &\Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$

De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,8 \times 0,5 \times 1,5 = 0,45 \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.
D'où le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0{,}45$	$\searrow$	0

b.
- **Initialisation.**
  $u_0 = 0,3$ et $u_1 = f(0,3) = 1,8 \times 0,3 \times 0,7 = 0,378$.
  Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$.
- **Hérédité.**
  Supposons que pour un entier n donné, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
  La fonction f étant croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, la propriété est vraie pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

c. De la question précédente, on déduit que (u_n)est croissante $(u_{n+1} \geqslant u_n)$ et majorée (par $\frac{1}{2}$) donc elle converge.
Sa limite α vérifie :

$$\begin{aligned} \alpha = f(\alpha) &\Leftrightarrow \alpha = 1,8\alpha(1-\alpha) \\ &\Leftrightarrow 1 = 1,8(1-\alpha) \qquad \text{car } \alpha \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1,8} = 1-\alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{1,8} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \approx 0{,}444\,444\,444$.

d. On conclut de la question précédente qu'à long terme, la population de coccinelles se rapprochera de 4 444 444.

Corrigé de l'exercice 21.

1 *a.* Pour calculer u_2, on prend en compte que l'allongement est homogène ; ainsi, quand Léo est à 1 mètre du point de départ, quand on tire l'élastique pour faire passer sa longueur de 100 mètres à 200 mètres, on la multiplie par 2 donc on doit faire de même pour la longueur qui sépare Léo du point de départ. Par conséquent, après l'allongement, Léo se trouve à $1 \times 2 = 2$ mètres du point de départ. Il suffit ensuite d'ajouter 1 mètre et on obtient $u_2 = 3$.

b. Sur ce même principe, on calcule u_3 : quand on allonge l'élastique de sorte à ce que sa longueur passe de 200 mètres à 300 mètres, on la multiplie par $\dfrac{300}{200} = 1,5$. Pour obtenir la valeur de u_3, on multiplie donc u_2 par 1,5 puis on ajoute 1 :

$$u_3 = 1,5u_2 + 1 = 1,5 \times 3 + 1 = 5,5.$$

2 Selon le même principe que précédemment, pour calculer u_{n+1} connaissant u_n, il faut trouver le « coefficient d'allongement ». Notons ℓ_n la longueur de l'élastique, en mètre, à l'étape n (avant l'allongement).

Ainsi, $\ell_1 = 100$, $\ell_2 = 200$ et par extension, $\ell_n = 100n$.

Le « coefficient d'allongement » est donc $k_n = \dfrac{100(n+1)}{100n} = 1 + \dfrac{1}{n}$.

Ainsi,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n + 1.$$

3 $u_3 = 5,5$ et $\ell_3 = 300$ donc $p_3 = \dfrac{u_3}{\ell_3} \times 100 = \dfrac{11}{6} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$.

4 Montrons par récurrence la formule proposée.

- Initialisation : nous l'avons montré pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
- Hérédité : supposons que pour un entier $k > 0$, $p_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.
  Quand on allonge l'élastique de 100 mètres, le pourcentage ne change pas car l'allongement est homogène (conserve les proportions). En ajoutant 1 mètre, proportionnellement à la longueur ℓ_{n+1}, on a ajouté $\dfrac{1}{n+1}$ %.
  Ainsi, $p_{n+1} = p_n + \dfrac{1}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$.
  L'hérédité est alors vérifiée. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

5 Par récurrence :

- $p_{2^0} = p_1 = 1 \geqslant 1 + \dfrac{0}{2}$;
- $p_{2^1} = p_2 = 1 + \dfrac{1}{2} \geqslant 1 + \dfrac{1}{2}$;
- $p_{2^2} = p_4 = 1 + \dfrac{1}{2} + \underbrace{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}}_{\geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} \geqslant 1 + 2 \times \dfrac{1}{2}$;
- $p_{2^3} = p_8 = p_4 + \underbrace{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}}_{\geqslant 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \geqslant 1 + 2 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1 + 3 \times \dfrac{1}{2}$;

- On suppose que $p_{2^{n-1}} \geqslant 1 + (n-1) \times \dfrac{1}{2}$.
  $p_{2^n} = p_{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^{n-1}+1} + \underbrace{\dfrac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}}_{=s_n}$.
  Or, $\dfrac{1}{2^k+p} \geqslant \dfrac{1}{2^{k+1}}$ pour tout entier k et pour tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant k+1$.
  Ainsi, dans la mesure où il y a $2^(n-1)$ termes dans s_n, $s_n \geqslant 2^(n-1) \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}$.
  Par conséquent, $p_{2^n} \geqslant 1 + (n-1) \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$, soit $p_{2^n} \geqslant 1 + n \times \dfrac{1}{2}$.
  L'hérédité est vérifiée donc la formule est vraie pour tout entier naturel n.

6 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2}n\right) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison des suites, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = +\infty$.
Cela sous-entend donc que le pourcentage de chemin fait par Léo sur l'élastique dépassera 100, ce qui signifie qu'il arrivera au bout de l'élastique.

Cela peut alors surprendre car le procédé ne permet a priori pas de l'envisager. C'est ce que l'on appelle un paradoxe qui peut s'expliquer de la façon suivante : pour n assez grand, on démontre (pas nous ! mais les grands mathématiciens...) que $p_n \approx \ln n$ (à une constante près, que l'on appelle la constante d'Euler, et que l'on note γ) donc si on cherche n tel que $p_n \geqslant 100$, on cherche n pour que $\ln n \geqslant 100$, soit $n \geqslant \mathrm{e}^{100}$. Or, $\mathrm{e}^{100} \approx 2,7 \times 10^{43}$. Alors, même si Léo faisait 1 mètre par seconde, il faudra à peu près $2,7 \times 10^{43}$ secondes pour qu'il atteigne le bout de l'élastique, ce qui correspond $8,56 \times 10^{35}$ années... Autant dire jamais !