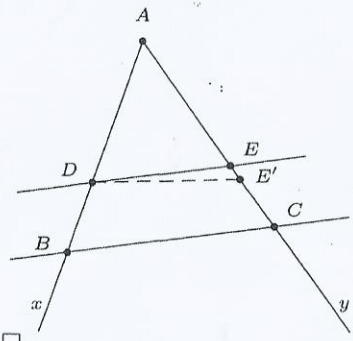
50.4 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème (Réciproque du théorème de Thalès)
Si deux droites déterminent sur les côtés d'un angle des segments proportionnels et de même disposition, ces droites sont parallèles.

Preuve
Supposons que deux droites (DE) et (BC) déterminent respectivement sur $[Ax$ et $[Ay$ des segments $[AD]$ et $[AB]$, $[AE]$ et $[AC]$, proportionnels, tels que l'on ait :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \qquad (*)$$

Montrons que (DE) est parallèle à (BC).



La parallèle à (BC) passant par le point D, coupe $[Ay)$ en E'. Montrons $E = E'$. D'après le théorème de Thalès appliqué dans le triangle ABC, on a :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE'}{AC} \qquad (**)$$

Donc en comparant les égalités (*) et (**), on en déduit :
$AE = AE'$, donc $E = E'$
et donc (DE) est parallèle à (BC).

□

50.5 Exercices

Exercice 1. Dans un triangle ABC, les côtés $[AB]$ et $[AC]$ mesurent respectivement 32 mm et 45 mm. Sur le côté $[AB]$, on marque un point M tel que $BM = 12$ mm. Par M, on mène la parallèle à (BC) qui coupe $[AC]$ en N. Calculer la distance AN.

Exercice 2. On considère trois demi-droites $[Ox$, $[Oy$ et $[Oz$ issues d'un point O. On prend sur $[Ox$ deux points A et A' et on mène par A et A' deux parallèles qui coupent $[Oy$ en B et B', puis par B et B' deux parallèles qui coupent $[Oz$ en C et C'.

a) Comparer les rapports $\frac{OA'}{OA}$, $\frac{OB'}{OB}$ et $\frac{OC'}{OC}$.
b) Montrer que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

Exercice 3. Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. On mène par le point G les parallèles aux côtés (AB) et (AC) qui coupent $[BC]$ en D et E.
a) Évaluer les rapports $\frac{BD}{BC}$ et $\frac{EC}{BC}$.
b) Comparer les longueurs des trois segments $[BD]$, $[DE]$ et $[EC]$.

Exercice 4. Par le point d'intersection O des diagonales du quadrilatère $ABCD$, on mène les parallèles aux côtés (BC) et (CD). Ces parallèles coupent respectivement $[AB]$ et $[AD]$ en E et F.
a) Comparer les rapports $\frac{AO}{AC}$, $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AF}{AD}$.
b) Montrer que (EF) et (BD) sont parallèles.

Exercice 5. Soit un triangle ABC. On prolonge $[BC]$ de deux longueurs BD et CE égales à BC. Puis on mène par D la parallèle à (AB) et par E la parallèle à (AC). Ces deux droites se coupent en F, et (FA) coupe (BC) en M.
a) Comparer les rapports $\frac{MA}{AF}$, $\frac{MB}{BD}$ et $\frac{MC}{CE}$.
b) Que représente M pour le segment $[BC]$?
c) Calculer la valeur du rapport $\frac{MA}{MF}$. Que représente A pour le triangle DEF ?

Exercice 6. Dans un triangle ABC, on mène les hauteurs $[BD]$ et $[CE]$, puis dans le triangle ADE, on mène les hauteurs $[DF]$ et $[EG]$.
a) Comparer $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AG}{AD}$, puis $\frac{AD}{AC}$ et $\frac{AF}{AE}$.
b) En déduire les égalités : $AD \times AE = AB \times AG = AC \times AF$
c) Montrer que (FG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 7. Dans un parallélogramme $ABCD$, on mène par le point A une sécante qui coupe les droites (BD), (BC) et (CD) respectivement en M, P et Q.
a) Comparer les rapports $\frac{MB}{MD}$ et $\frac{MA}{MQ}$, puis $\frac{MB}{MD}$ et $\frac{MP}{MA}$
b) Démontrer la relation $MA^2 = MP \cdot MQ$

Exercice 8.
On se donne un segment $[BC]$ de longueur 10 cm.

a) Construire le point M placé entre B et C tel que $\frac{BM}{MC} = \frac{3}{2}$
Calculer les longueurs des segments $[MB]$ et $[MC]$.

b) Soit a un nombre réel strictement positif fixé. On souhaite construire un triangle ABC dans lequel la longueur des côtés $[BA]$ et $[CA]$ exprimée en cm soit respectivement $3a$ et $2a$.
Cette construction est-elle possible pour $a = 1$?
Donner une condition sur a pour que la construction soit possible.

c) En supposant le triangle ABC construit de telle sorte que $BA = 3a$ et que $CA = 2a$, on mène par le point C la parallèle à la droite (AM) qui coupe la droite (AB) en D.
Évaluer AD en fonction de a.

Exercice 9. Soit un triangle ABC. La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ coupe le segment $[BC]$ en D. Montrer : $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$

Exercice 10. On considère un quadrilatère inscriptible $ABCD$. Les droites (AD) et (BC) se coupent en M.
On construit sur (MA) le point E tel que $ME = MC$ et sur (MB) le point F tel que $MF = MD$.

a) Comparer les directions des droites (AB) et (EF), puis les rapports $\frac{MA}{MB}$ et $\frac{ME}{MF}$.

b) Démontrer la relation $MA \cdot MD = MB \cdot MC$

Exercice 11. Soit deux points A et B tels que $AB = 10$ cm.

a) Construire les points M, N et P situés dans cet ordre, à partir de A, sur le segment $[AB]$ tels que l'on ait :

$$\tfrac{1}{3}AM = \tfrac{1}{2}MN = \tfrac{1}{7}NP = \tfrac{1}{4}PB$$

b) Calculer les longueurs des segments $[AM]$, $[MN]$, $[NP]$ et $[PB]$.

Exercice 12. On considère trois segments de longueurs respectives ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Construire un segment de longueur x telle que l'on ait :

$$\ell_1 \cdot x = \ell_2 \cdot (\ell_1 + \ell_3)$$

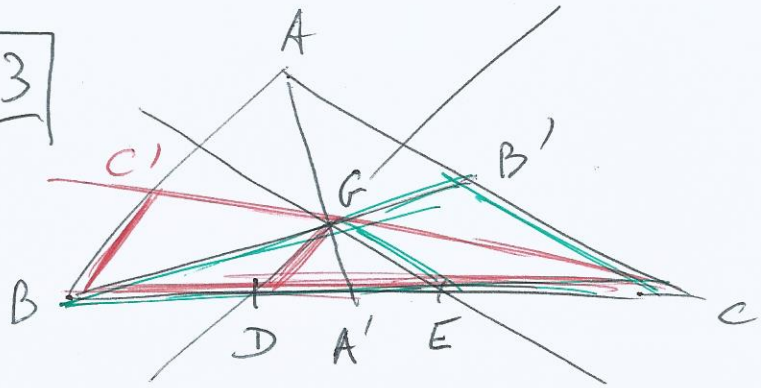
Exercice 13. Soit un losange $ABCD$. Soit E le point de $[AB]$ tel que $AE = \frac{1}{3}AB$, et F le point de $[CD]$ tel que $CF = \frac{1}{3}CD$.

a) Montrer que la droite (EF) passe par le centre K du losange.

b) La droite (EF) coupe (AD) en M et (BC) en N.
Montrer que $ME = EF = FN$.

c) Montrer que les droites (BM) et (BD) sont perpendiculaires.

Ex 3



a/ $\frac{BG}{BB'} = \frac{BE}{BC}$ et $BG = \frac{2}{3}BB'$ $\Rightarrow$ $\frac{BC-EC}{BC} = \frac{2}{3}$

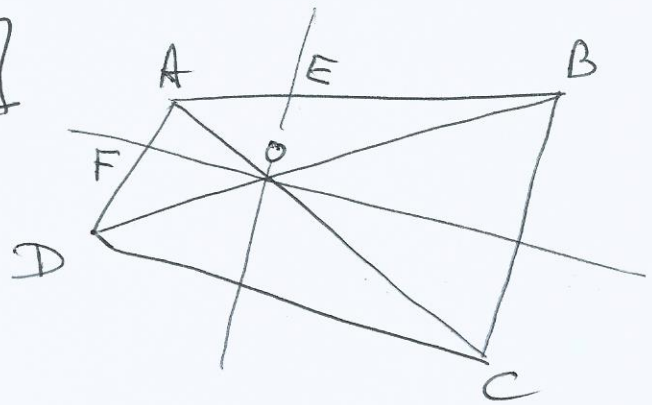
$\Rightarrow$ $1 - \frac{EC}{BC} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{EC}{BC} = \frac{1}{3}}$

$\frac{CG}{CC'} = \frac{2}{3} = \frac{CD}{CB} = \frac{BC-BD}{BC}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}} = \frac{EC}{BC}$

b) $BD = EC = \frac{1}{3}BC$ $\Rightarrow$ $DE = \frac{1}{3}BC$ $\Rightarrow$ $\boxed{BD = EC = DE}$

Ex 4

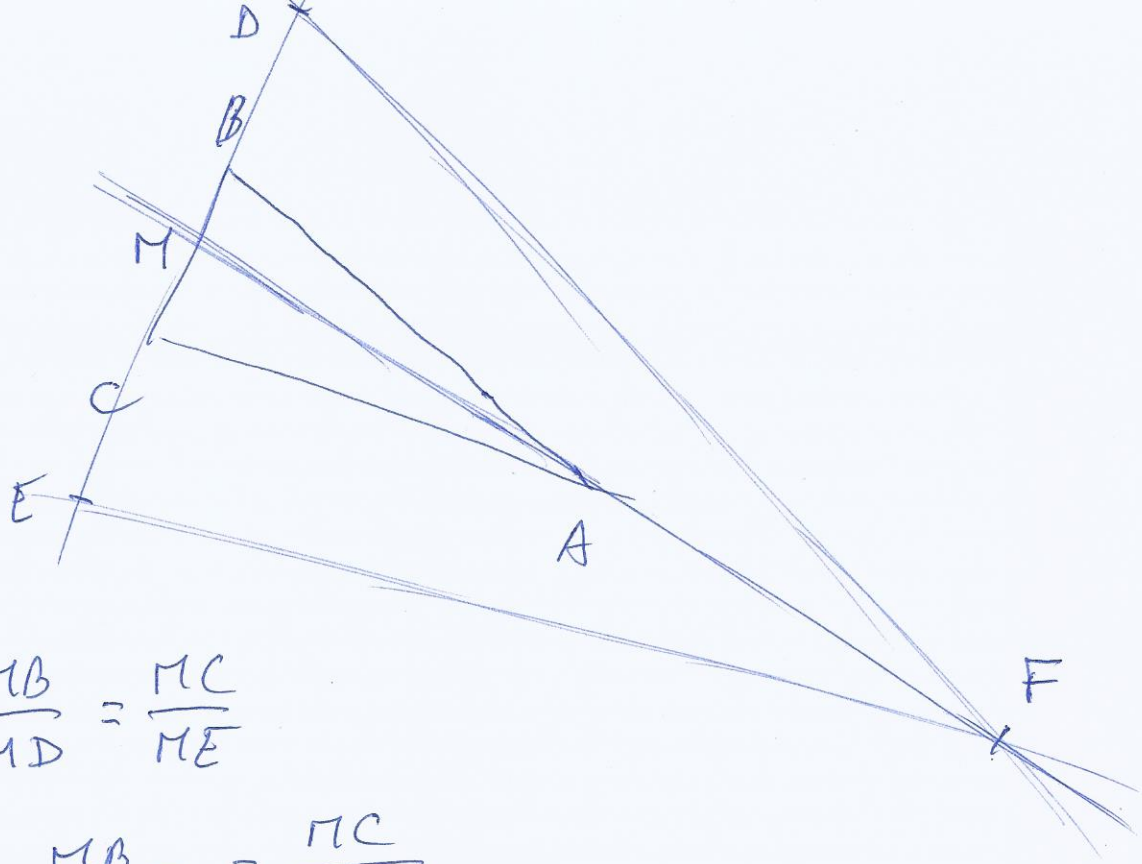


a) $\frac{AE}{AB} = \frac{AO}{AC}$ et $\frac{AF}{AD} = \frac{AO}{AC}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}}$

b) $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$ $\Rightarrow$ $\boxed{(FE) // (DB)}$

5



a) $\frac{MA}{MF} = \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{ME}$

$\frac{MA}{MA+AF} = \frac{MB}{MB+BD} = \frac{MC}{MC+CE}$

$\frac{MA+AF}{MA} = \frac{MB+BD}{MB} = \frac{MC+CE}{MC}$

$1+\frac{AF}{MA} = 1+\frac{BD}{MB} = 1+\frac{CE}{MC}$

$\frac{AF}{MA} = \frac{BD}{MB} = \frac{CE}{MC} \iff \boxed{\frac{MA}{AF} = \frac{MB}{BD} = \frac{MC}{CE}}$

b) $\frac{MB}{BD} = \boxed{\frac{MB}{BC}} = \frac{MC}{CE} = \boxed{\frac{MC}{BC}} \Rightarrow MB = MC$

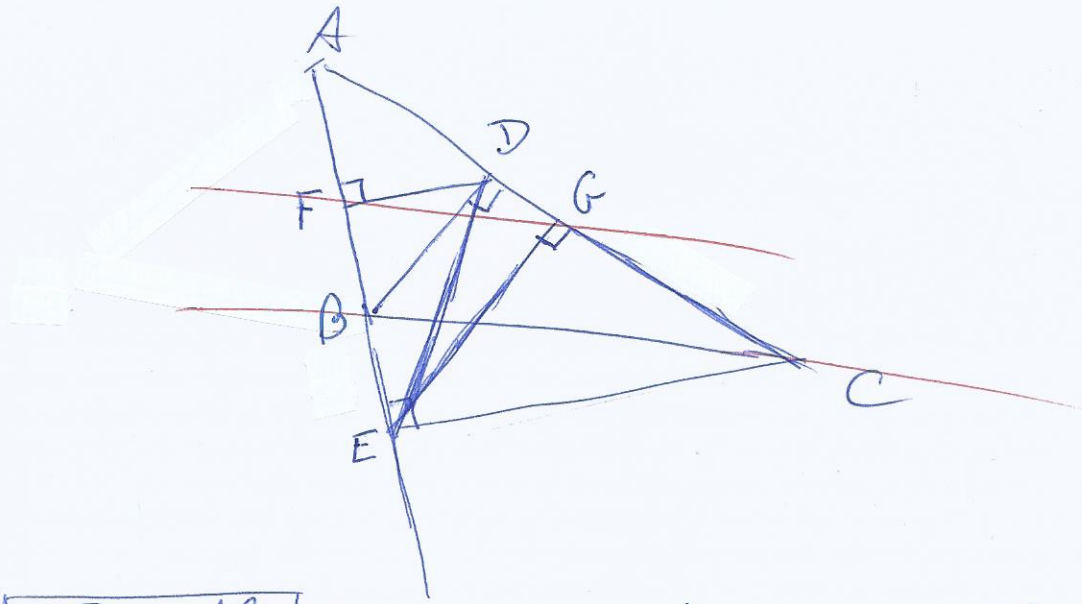
$\rightarrow$ $\boxed{M \text{ milieu de } [BC]}$

c) $\frac{MA}{MF} = \frac{MB}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{MA}{MF} = \frac{1}{3}}$

d'où $FA = \frac{2}{3} FM \Rightarrow$ A centre de gravité de EDF

((FM) médiane issue de F)

6



a) $\boxed{\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD}}$ dans AGE

$\boxed{\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE}}$ dans AEC

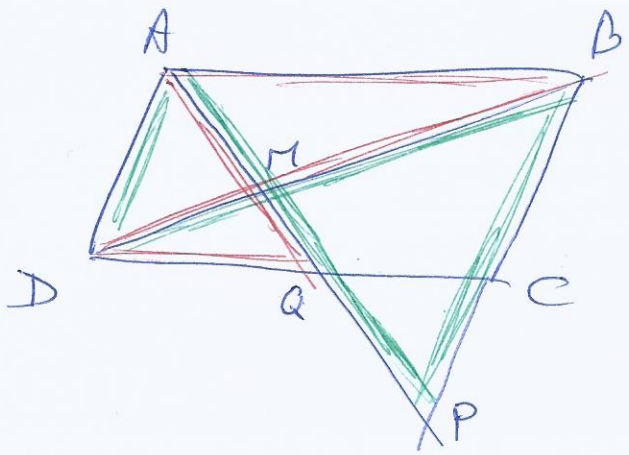
b) $\begin{cases} AE \times AD = AG \times AB \\ AD \times AE = AF \times AC \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{AD \times AE = AB \times AG = AC \times AF}$

c) $\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC} \Rightarrow \boxed{(FG) // (BC)}$

7

a)

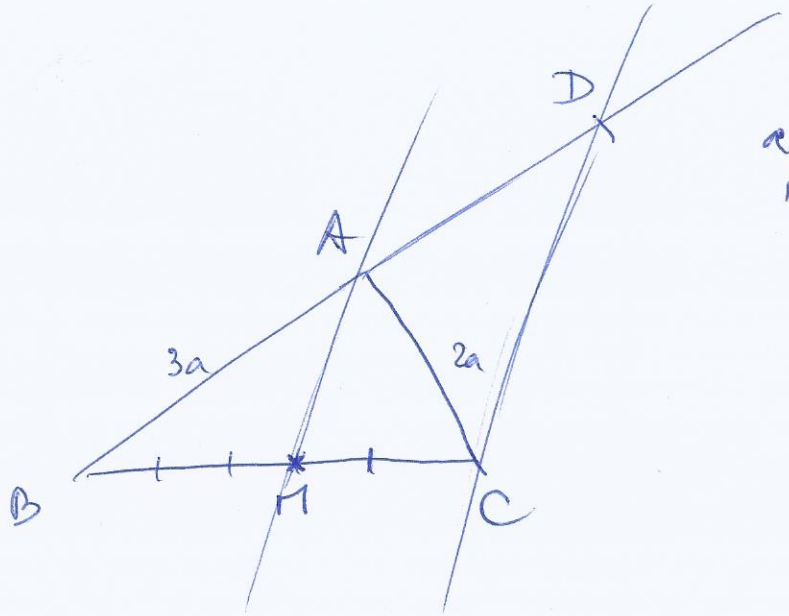


$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MQ}$

$\frac{MB}{MD} = \frac{MP}{MA}$

b) $\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MQ} = \frac{MP}{MA} \Rightarrow \boxed{MA^2 = MP \times MQ}$

8



a) $BM = \frac{3}{2} MC$

$BM = \frac{3}{2}(BC - MB)$

$\Rightarrow BM = \frac{3}{5} BC = 6\,cm$

$\Rightarrow CM = 4\,cm$

b) si $a=1$, $AB=3$ et $AC=2$

$\Rightarrow AB + AC < BC \Rightarrow$ construction impossible

Il faut que $AB + AC \geq BC \Leftrightarrow 3a + 2a \geq 10$

$\Leftrightarrow a \geq 2$

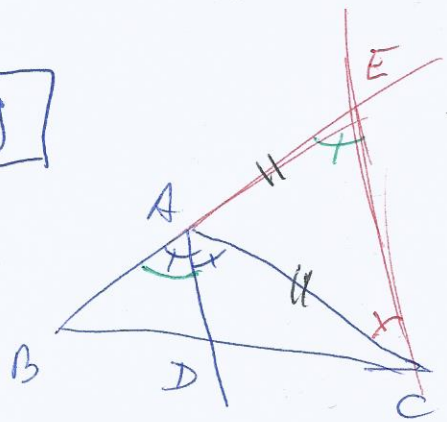
si $a=2$, triangle plat.

c) $\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5}{3} AB = BD = BA + AD$

$\Rightarrow AD = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \times 3a$

$\Rightarrow \boxed{AD = 2a}$

9



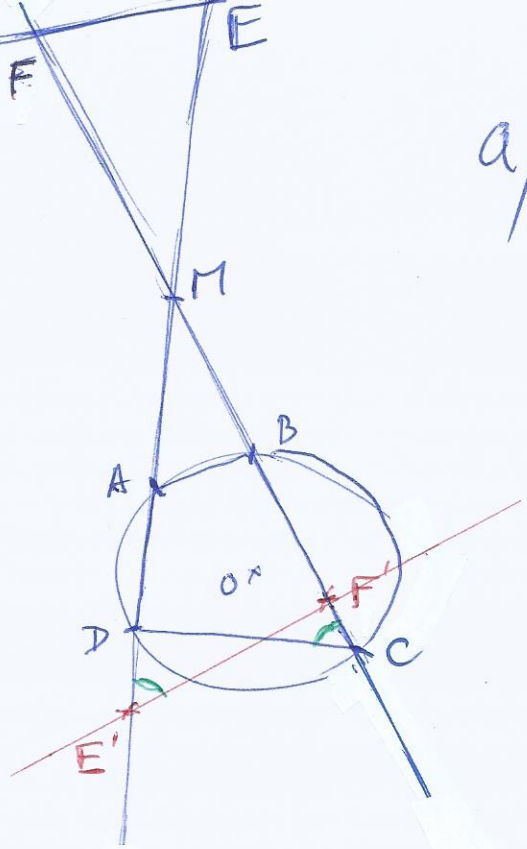
$\frac{BD}{BC} = \frac{BA}{BE} \Leftrightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{AB}{BA+AE} = \frac{AB}{AB+AC}$

$\Leftrightarrow \frac{BD+DC}{BD} = \frac{AB+AC}{AB}$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{DC}{BD} = 1 + \frac{AC}{AB}$

$\Leftrightarrow \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \boxed{\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}}$

10



a) $\widehat{E'} = \widehat{C}$

d'après ABCD est inscriptible

donc $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{DAB} = 180° - \widehat{DCB}$

$= 180° - \widehat{AE'F'}$

de +, $\widehat{BAM} = 180° - \widehat{DAB}$

$\Rightarrow \widehat{BAM} = 180° - (180° - \widehat{AE'F'})$

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{AE'F'}$

$\Rightarrow$ **(E'F') // (AB)**

donc $\frac{MA}{ME'} = \frac{MB}{MF'}$

$\Rightarrow$ **$\frac{MA}{MB} = \frac{ME'}{MF'}$**

b) $ME' = MC$

et $MF' = MD$

$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}$

$\Rightarrow$ **$MA \times MD = MB \times MC$**

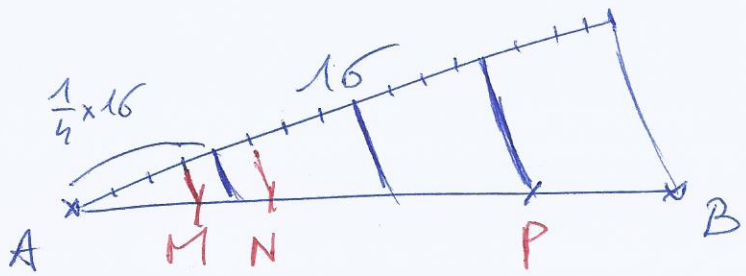
11

a) $NP = \frac{7}{4}PB$; $MN = \frac{1}{2}PB$; $AM = \frac{3}{4}PB$

or $AM + MN + NP + PB = AB \Leftrightarrow \frac{3}{4}PB + \frac{1}{2}PB + \frac{7}{4}PB + PB = AB$

$\Rightarrow PB = \frac{1}{4}AB$

d'où $NP = \frac{7}{16}AB$; $MN = \frac{1}{8}AB$; $AM = \frac{3}{16}AB$



b/ $AM = \frac{3}{16} \times 10 = \frac{15}{8}$ cm $= 1{,}875$ cm

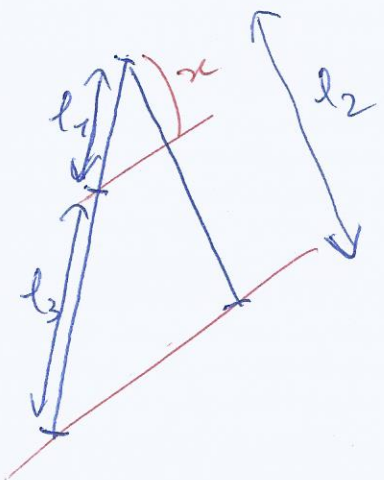
$MN = \frac{1}{8} \times 10 = \frac{5}{4}$ cm $= 1{,}25$ cm

$NP = \frac{7}{16} \times 10 = \frac{35}{8}$ cm $= 4{,}375$ cm

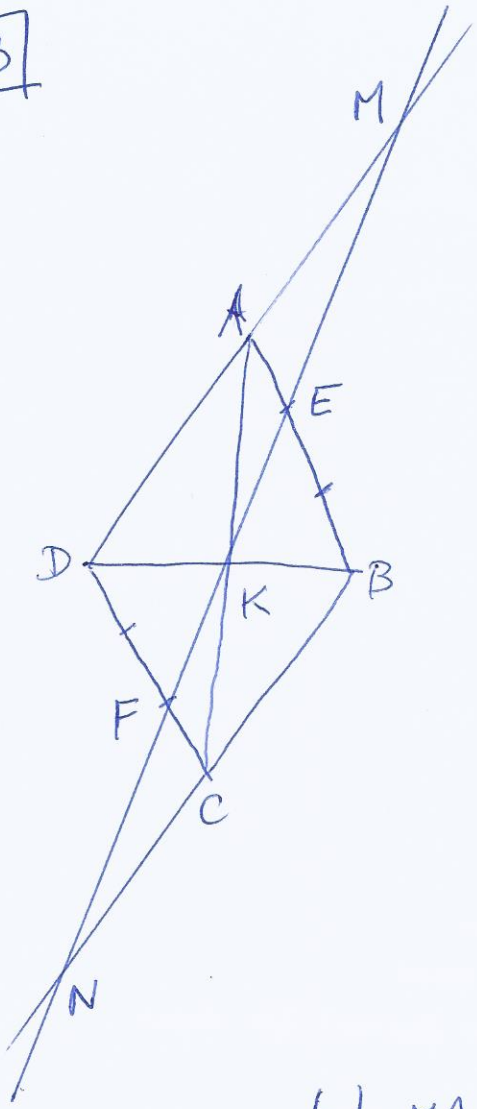
$PB = \frac{1}{4} \times 10 = 2{,}5$ cm

12

$\frac{x}{l_2} = \frac{l_1}{l_1 + l_3}$ donc



13



a) Montrons que AECF est un parallélogramme.

$E \in [AB]$ et $F \in [DC]$ or $(AB) // (DC)$

donc $(AE) // (FC)$.

De +, $AE = \frac{1}{3} AB$ et $FC = \frac{1}{3} DC$

or $AB = DC \Rightarrow AE = FC$.

donc AECF ~~≠~~.

K milieu de $[AC]$ et les diag de AECF se coupent en leur milieu.

Donc K milieu de $[EF]$.

$\Rightarrow \boxed{K \in (EF)}$

b) $\frac{MA}{MD} = \frac{ME}{MF} = \frac{AE}{DF} = \frac{\frac{1}{3} AB}{\frac{2}{3} DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow ME = \frac{1}{2} MF$

$\Rightarrow \underline{ME = EF}$

de même $\frac{NF}{NE} = \frac{NC}{NB} = \frac{FC}{EB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{NF = FE}$

$\Rightarrow \boxed{ME = EF = FN}$

c) $\frac{MA}{MD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ A milieu de $[DM]$

et K milieu de $[DB]$

d'après la droite des milieux $(AK) // (MB)$

or $(AK) \perp (BD) \Rightarrow \boxed{(MB) \perp (BD)}$