✍ *Problème n° 1 : Yin et Yang*

Sur un diamètre [AB] d'un cercle de rayon 4 cm, on marque un point M. On désigne par $2x$, avec $0 \leq x \leq 4$, la longueur de AM.

On trace deux demi-cercles de part et d'autre de (AB), de diamètre [AM] pour l'un et [BM] pour l'autre. Exprimer l'aire de la partie hachurée et déterminer pour quelle valeur de x cette aire est minimum.

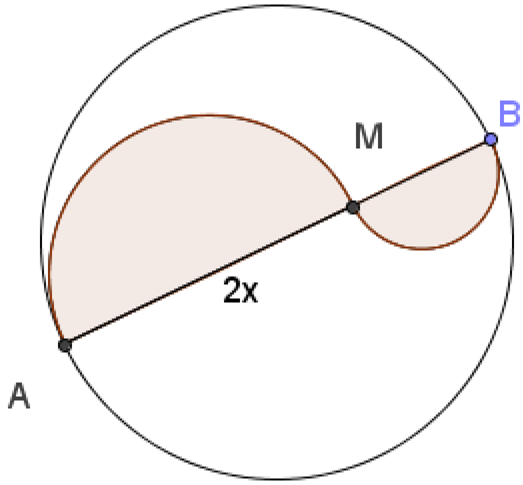

Figure 1 - Fichier Géogébra disponible

☞ L'énoncé nous choisit ici la variable x dans l'intervalle $[0\,;4]$ représentant le rayon du premier demi-cercle de diamètre $[AM]$, il s'agit ici d'étudier l'aire des deux demi-cercles (l'aire rouge sur la figure).

- Aire du demi-cercle de diamètre $[AM]$:
$$\mathcal{A}_1(x) = \frac{\pi x^2}{2}$$
On divise par deux pour obtenir l'aire du demi-cercle.
- Aire du demi-cercle de diamètre $[MB]$.
Tout d'abors il nous faut déterminer le rayon de ce demi-cercle :
$$\frac{MB}{2} = \frac{AB - AM}{2} = \frac{8 - 2x}{2} = 4 - x.$$
$$\mathcal{A}_2(x) = \frac{\pi(4 - x)^2}{2} = \frac{\pi}{2}(16 - 2 \times 4x + x^2) = \frac{\pi}{2}(x^2 - 8x + 16).$$

L'aire de la partie rouge qui nous intéresse est la somme des deux aires précédentes :
$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}(x^2 - 8x + 16) = \frac{\pi}{2}(2x^2 - 8x + 16)$$
$$= \frac{\pi}{2} \times 2(x^2 - 4x + 8) = \pi(x^2 - 4x + 8).$$

Ceci est l'équation d'un fonction polynômes du second degré. Son premier coefficient est $a = \pi$, strictement positif.
Donc la parabole représentant cette fonction est tournée vers le haut ; la fonction admet donc un minimum.
Le problème est ramené à chercher le minimum de cette fonction. Qui est atteint pour la même valeur de x que le minimum de la fonction f défint également sur $[0\,;\,4]$ par :
$$f(x) = x^2 - 4x + 8.$$
Dans le cas de cette fonction, on détermine $a = 1$, $b = -4$ et $c = 8$.
Le minimum est atteint lorsque $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$.
Et l'aire minimum vaut : $\mathcal{A}(2) = \pi(2^2 - 4 \times 2 + 8 = \pi(4 - 8 + 8) = 4\pi \simeq 12{,}57\text{cm}^2$.
✇Animation le point E a pour abscisse la valeur du curseur et pour ordonnée l'aire de la surface rouge des deux demi-cercles.

✍ *Problème n° 2 : Triangle et rectangle*

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que : $AB = AC = 6\,cm$. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$,

Soient $N \in [BC]$ et $P \in [AC]$ tels que le quadrilatère *AMNP* soit un rectangle.

Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale ?

☞Pour pouvoir calculer l'aire du rectangle $AMNP$, il nous faut la longueur du segment $[AP]$ qui est égale à la longueur du segment $[MN]$.

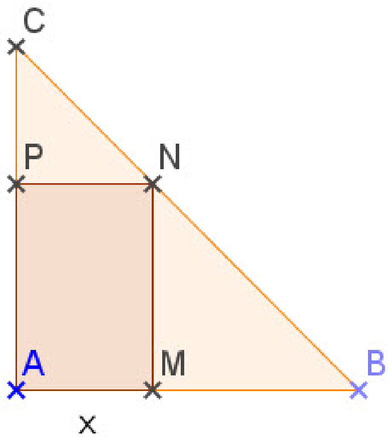

Figure 2 Fichier Géogébra disponible

Il faut tout d'abord justifier que les triangles MBN et PNC sont rectangles isocèles en B et P : en effet

- Ils sont tous deux rectangles par construction du rectangle $AMNP$
- et isocèles car les angles $\widehat{MBN}$ et $\widehat{NCP}$ valent $45°$ parce que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Ensuite, la variable x est définie dans l'intervalle $[0\,;6]$.
Il s'agit ici d'étudier l'aire du rectangle $AMNP$ et d'en trouver son maximum.
Rappel : L'aire d'un rectangle est donnée par longueur×largeur (ici $AM \times AP$)
La longueur $AM = x$ d'après les choix de l'énoncé.
Calculons la longueur AP : $AP = MN \underbrace{=}_{\substack{car\ le\ triangle\ MBN \\ est\ isocèle\ en\ M.}} MB = AB - AM = 6 - x$.
Donc l'aire du rectangle $AMNP$ est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(x) = (6 - x) \times x = 6x - x^2.$$

Cette fonction est un polynôme du second degré de coefficients :

$$a = -1, \quad b = 6 \ \text{ et } \ c = 0.$$

Le premier coefficient $a = -1$ est strictement négatif, donc la parabole représentant cette fonction est tourné vers le bas. Elle admet un maximum atteint lorsque :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times (-1)} = \frac{6}{2} = 3.$$

L'aire du triangle est maximale lorsque $x = 3$, c'est-à-dire lorsque le point M est au milieu du segment $[AB]$.
L'aire maximale ce calcul alors en faisant : $f(3) = 6 \times 3 - 3^2 = 18 - 9 = 9\text{cm}^2$.

Animation : le point D à pour abscisse x la valeur du curseur x qui se déplace et en ordonnée l'aire du rectangle $AMNP$.